

PESQUISA OPERACIONAL

Professor: Janilson

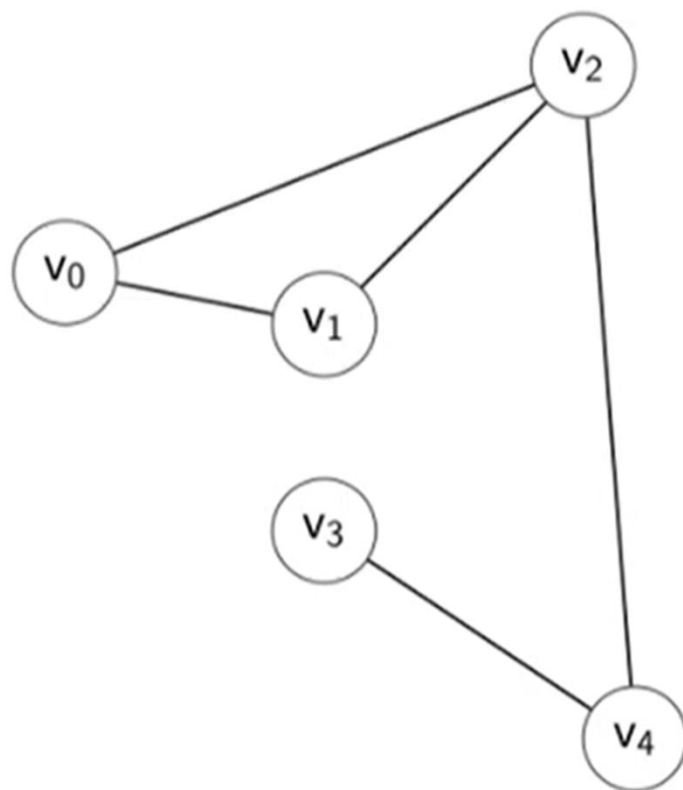
Curso: BSI

Grafos – Conceitos Básicos

- O que é um grafo?
- Grafos são estruturas matemáticas (ou modelos matemáticos) que permitem codificar relacionamentos entre pares de objetos
 - Os objetos são os vértices do grafo
 - Os relacionamentos são suas arestas

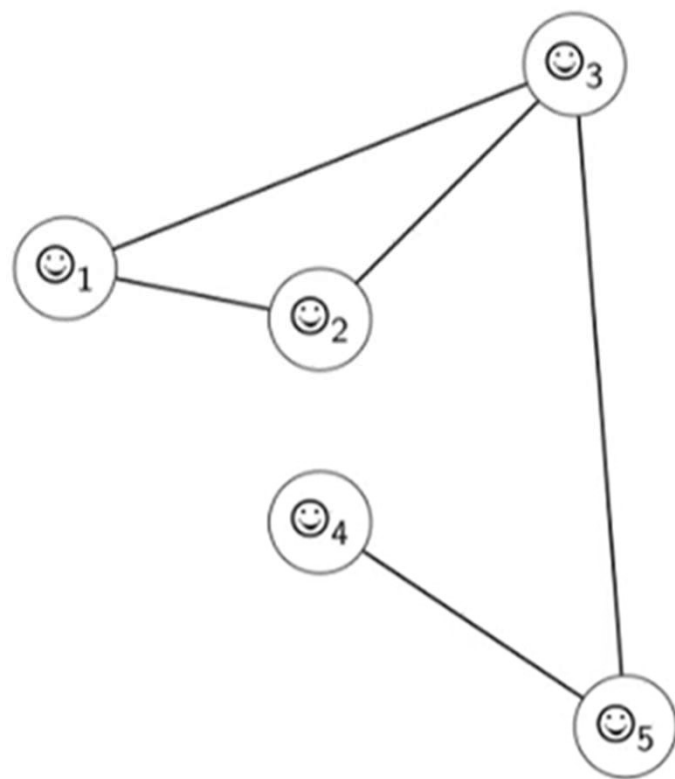
Grafos – Conceitos Básicos

- São representados como um conjunto de nós (vértices) conectados par a par por linhas (arestas)



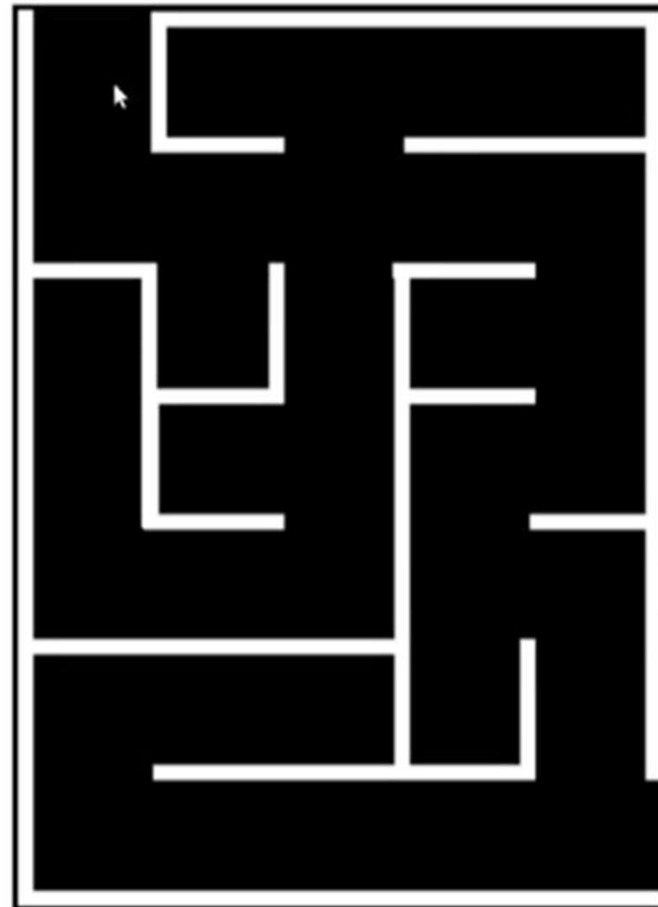
Grafos – Conceitos Básicos

- Podem ser utilizados para representar uma infinidade de situações/problemas
- Podem modelar conexões em redes sociais



Grafos – Conceitos Básicos

- Podem ser utilizados para representar uma infinidade de situações/problemas
- Podem modelar conexões em redes sociais
- Labirintos



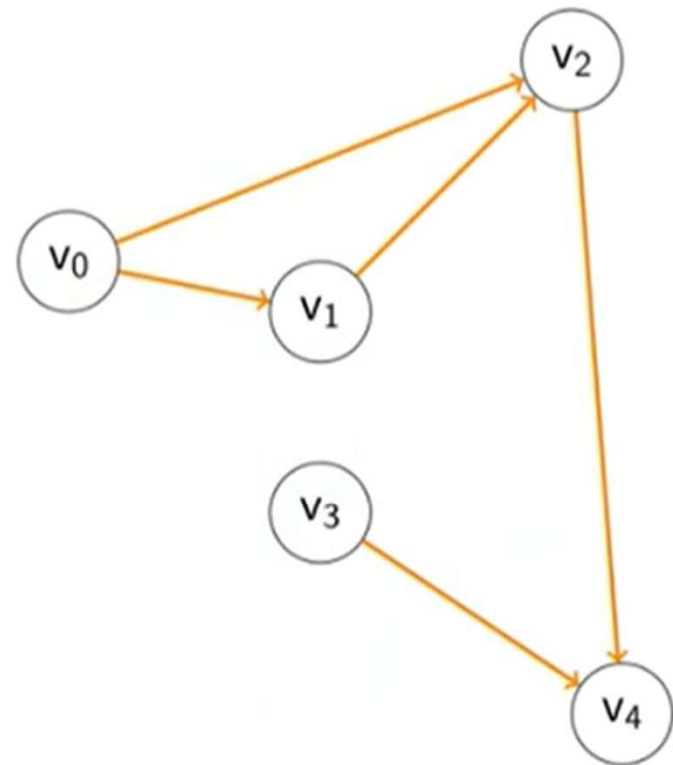
Grafos – Conceitos Básicos

- Podem ser utilizados para representar uma infinidade de situações/problemas
- Podem modelar conexões em redes sociais
- Labirintos
- Rotas de metrô



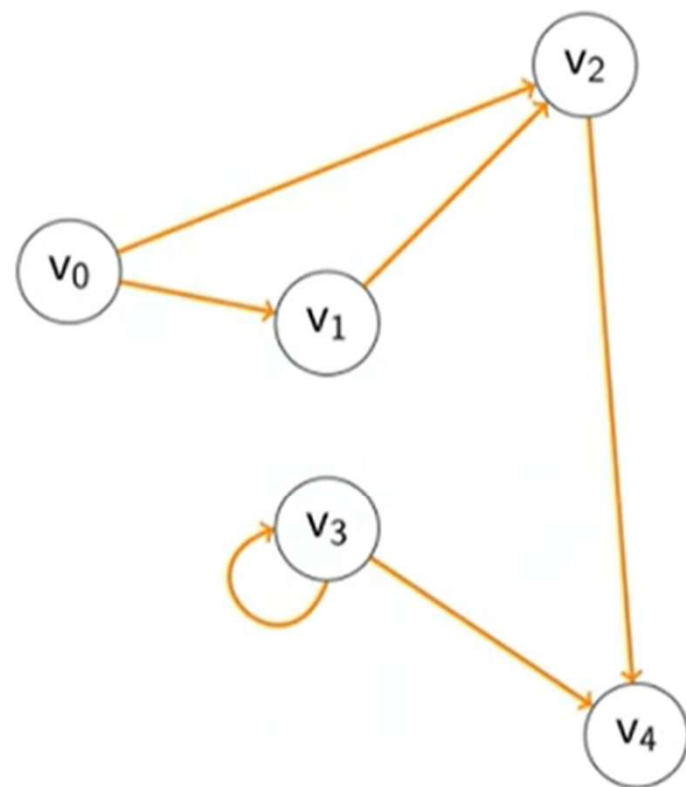
Grafos – Conceitos Básicos

- Alguns grafos são dirigidos (ou direcionados) - digrafos
 - As relações representadas pelas arestas têm sentido definido
 - As arestas só podem ser seguidas em uma única direção



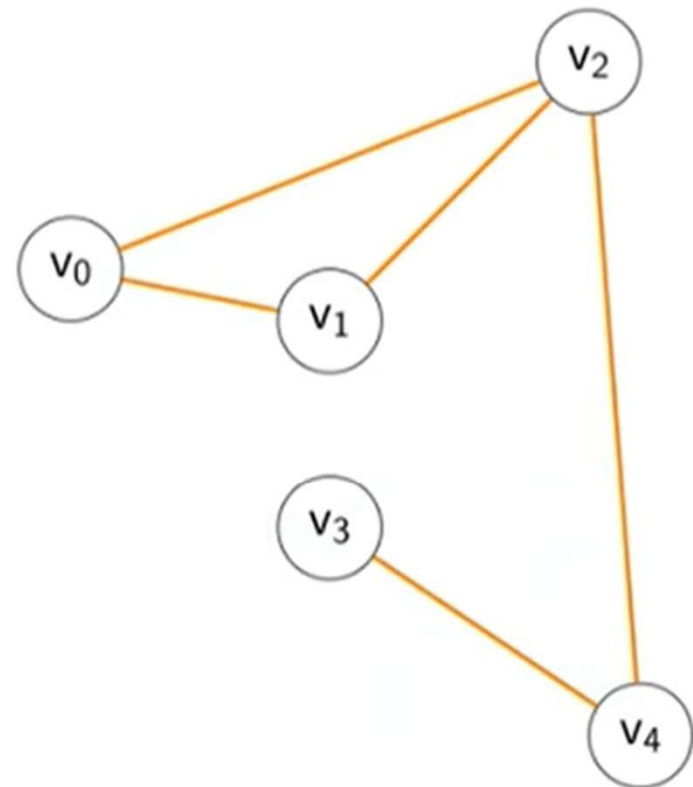
Grafos – Conceitos Básicos

- Em grafos dirigidos, as arestas são pares ordenados de vértices
 - Saindo de um em direção ao outro
 - Mesmo que ambos sejam o mesmo vértice (auto-laços - *self-loop*)



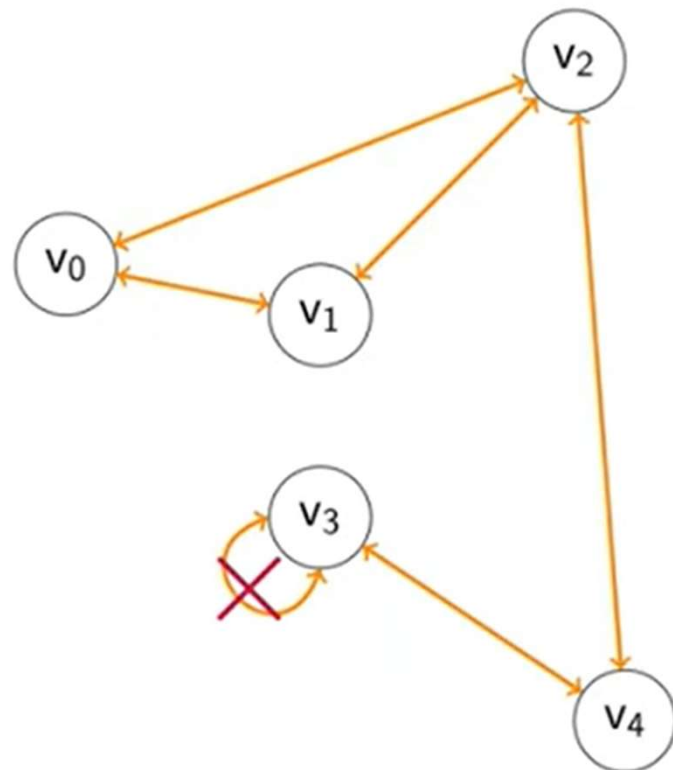
Grafos – Conceitos Básicos

- Outros são não dirigidos (ou não direcionados)
 - As relações representadas pelas arestas não têm sentido definido
 - As arestas podem ser seguidas em qualquer direção



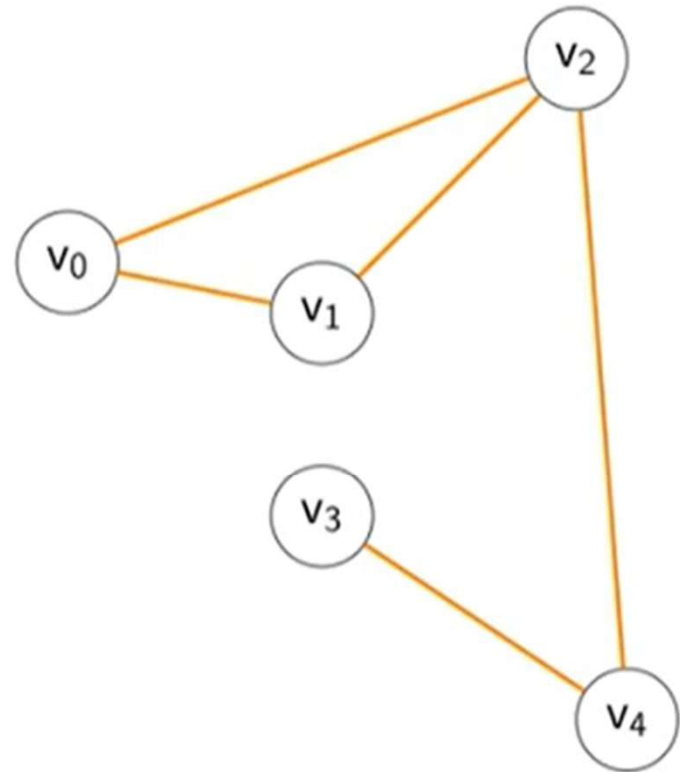
Grafos – Conceitos Básicos

- Podemos pensar num grafo não dirigido como um grafo dirigido com arestas de sentido duplo
- As arestas são pares não ordenados de vértices
- *Self-loops* não são permitidos



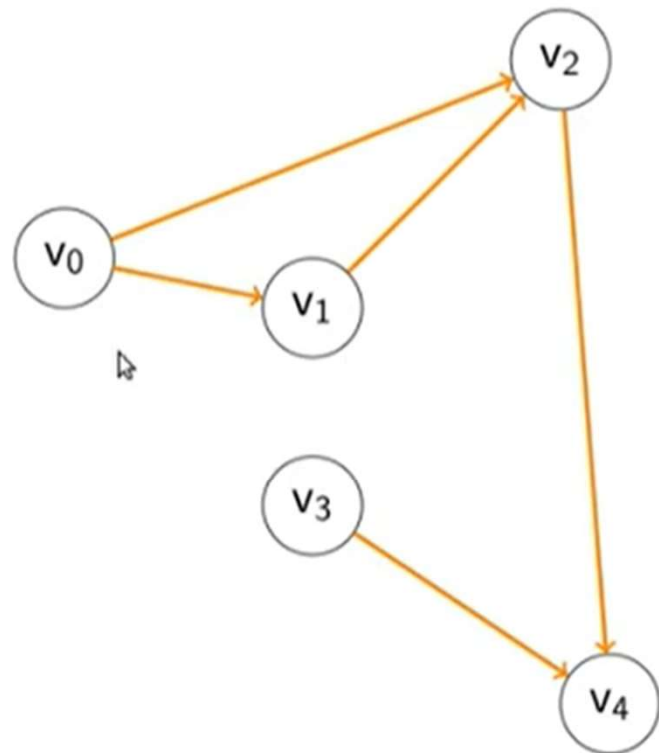
Grafos – Conceitos Básicos

- Em grafos não dirigidos, a relação de adjacência é simétrica
 - $(u, v) \Leftrightarrow (v, u)$



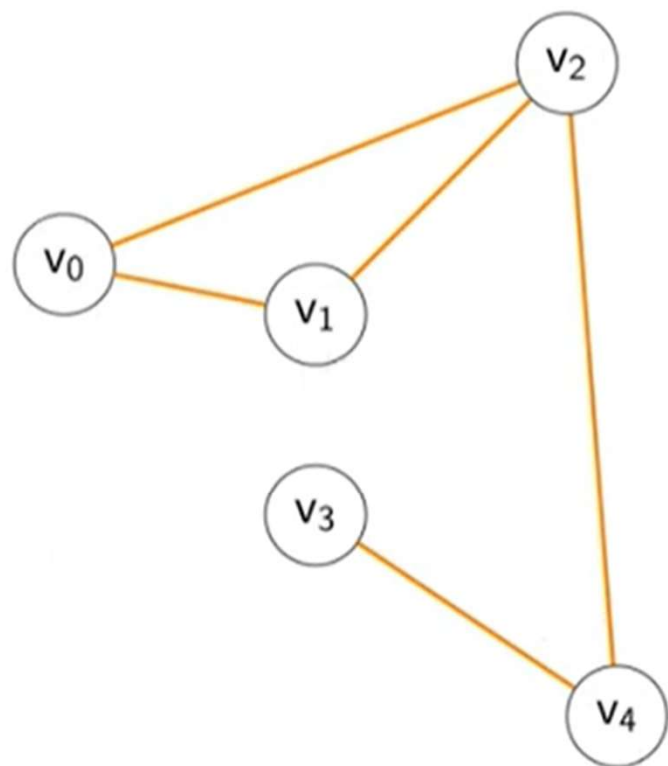
Grafos – Conceitos Básicos

- Em grafos não dirigidos, a relação de adjacência é simétrica
 - $(u, v) \Leftrightarrow (v, u)$
- Já em dirigidos, não necessariamente há tal simetria
 - Há (v_0, v_1) , mas não (v_1, v_0)



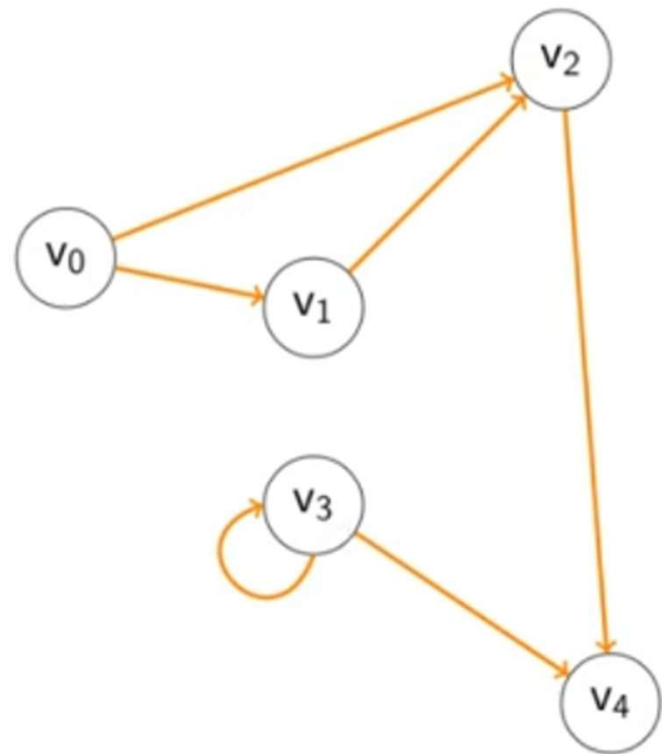
Grafos – Conceitos Básicos

- Em grafos não dirigidos, o grau de um vértice é o número de arestas que incidem nele
 - $gr(v_0) = gr(v_1) =$
 - $gr(v_4) = 2$
 - $gr(v_2) = 3$
 - $gr(v_3) = 1$



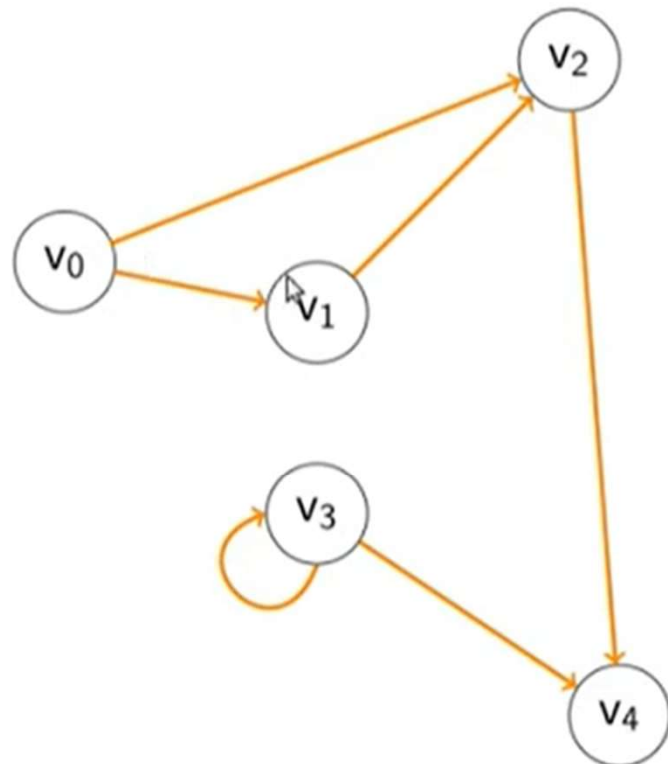
Grafos – Conceitos Básicos

- Já em grafos dirigidos, o grau de um vértice é o número de arestas que saem do vértice mais o número de arestas que chegam nele
 - $gr(v_0) = gr(v_1) = gr(v_4) = 2$
 - $gr(v_2) = gr(v_3) = 3$



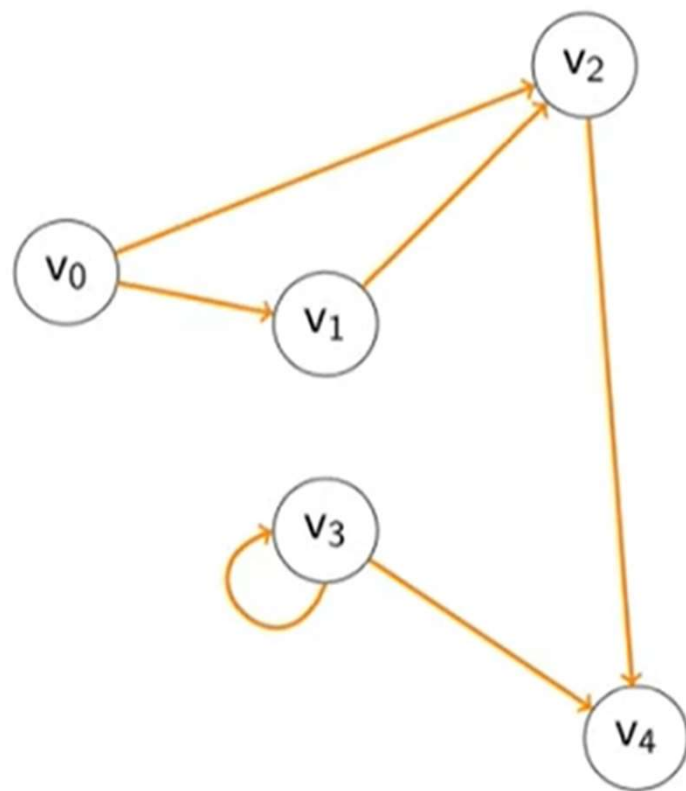
Grafos – Conceitos Básicos

- No caso de grafos dirigidos, há dois tipos específicos de graus de vértice:
 - Grau de saída: número de arestas que saem do vértice
 - Grau de entrada: número de arestas que chegam no vértice



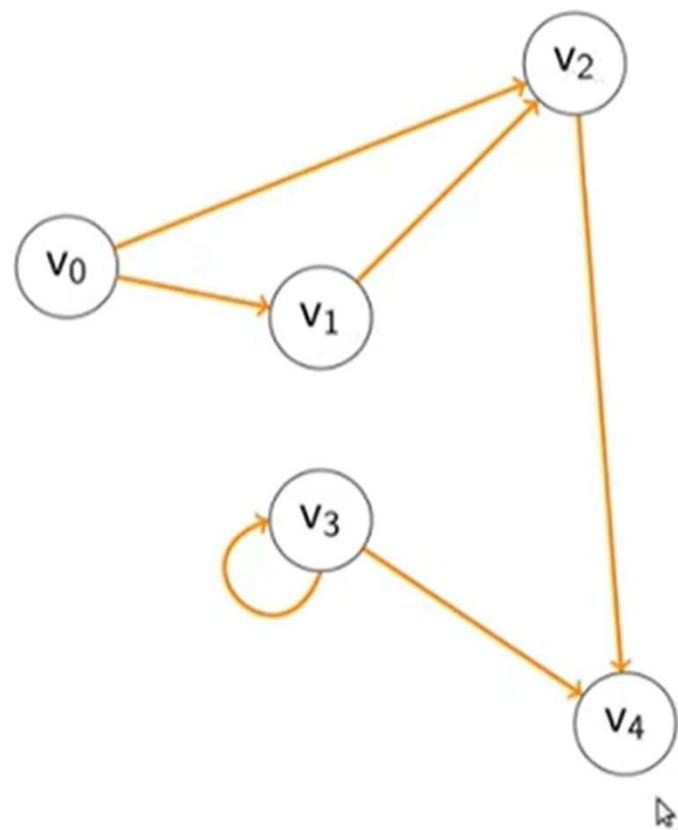
Grafos – Conceitos Básicos

- Um caminho de um vértice x a um vértice y é uma sequência de vértices em que, para cada vértice, do primeiro ao penúltimo, há uma aresta ligando esse vértice ao próximo na sequência.



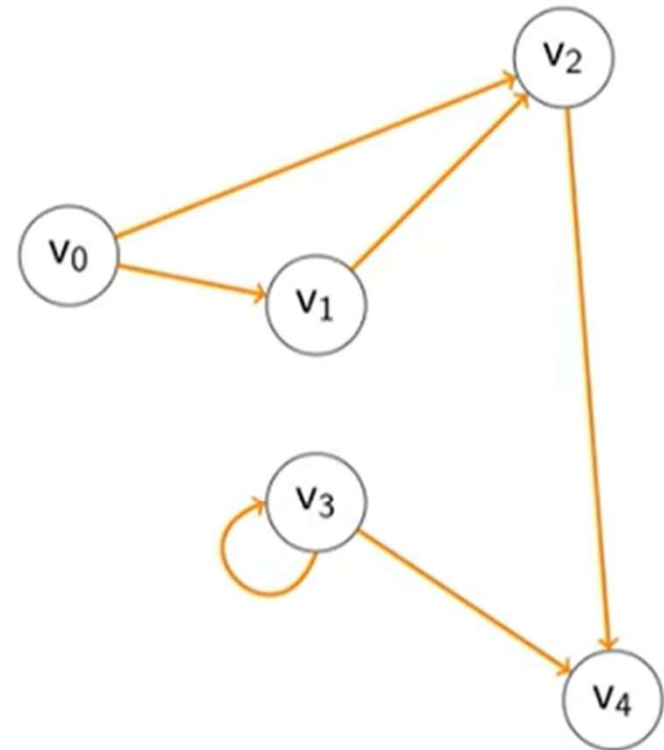
Grafos – Conceitos Básicos

- No caso ao lado, alguns caminhos são:
 - (v_0, v_1, v_2, v_4)
 - (v_3, v_4)
 - (v_0, v_1, v_2)
 - (v_3, v_3, v_4)



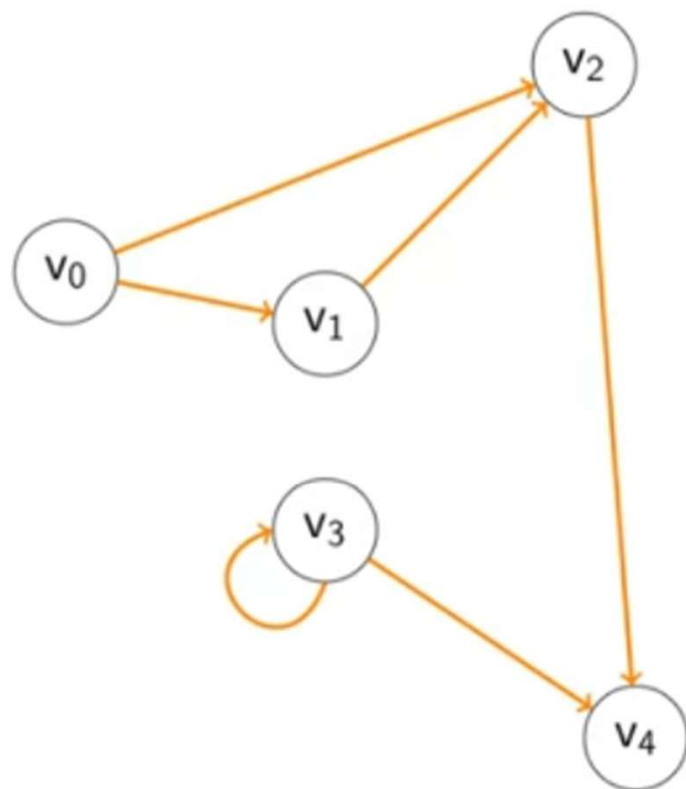
Grafos – Conceitos Básicos

- O comprimento de um caminho é o número de arestas nele



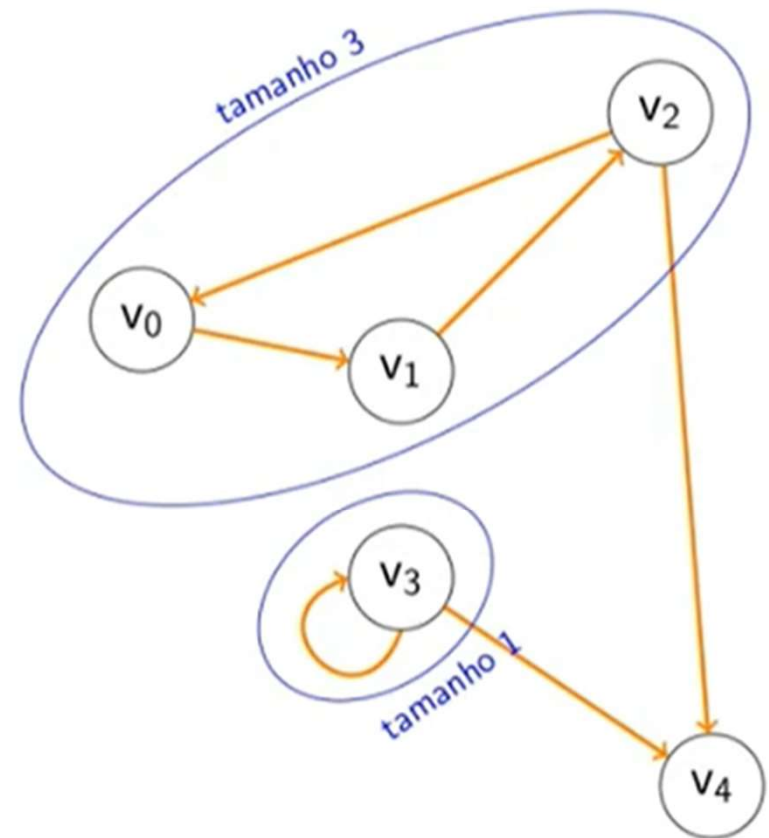
Grafos – Conceitos Básicos

- O comprimento de um caminho é o número de arestas nele
 - $compr(v_0, v_1, v_2, v_4) = 3$
 - $compr(v_3, v_4) = 1$
 - $compr(v_0, v_1, v_2) = 2$
 - $compr(v_3, v_3, v_4) = 2$



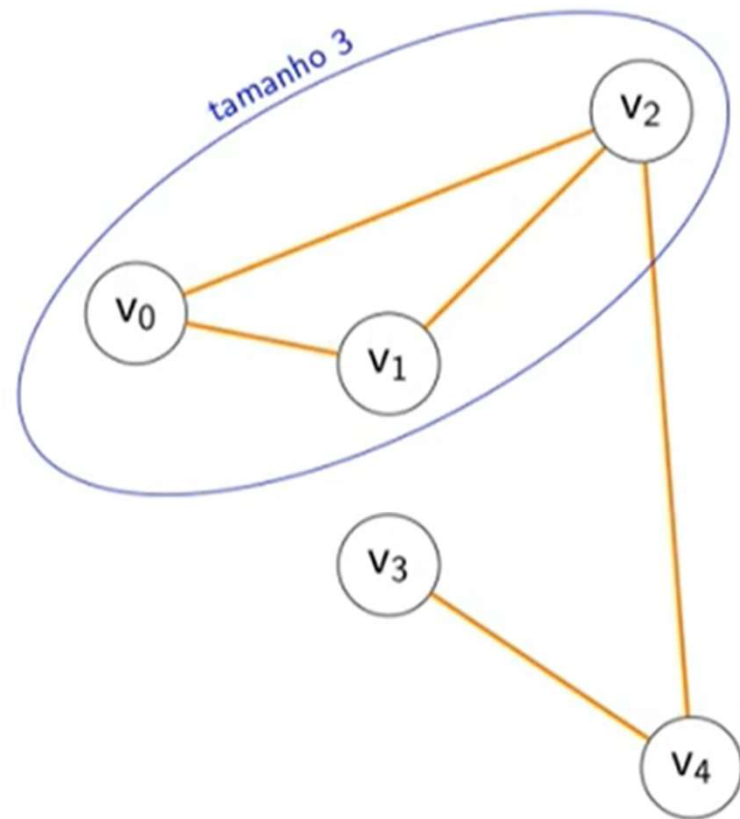
Grafos – Conceitos Básicos

- Um ciclo acontece quando, a partir de um determinado vértice, pudermos percorrer algum caminho que nos leve a esse mesmo vértice
 - Em grafos dirigidos, o caminho deve conter pelo menos uma aresta



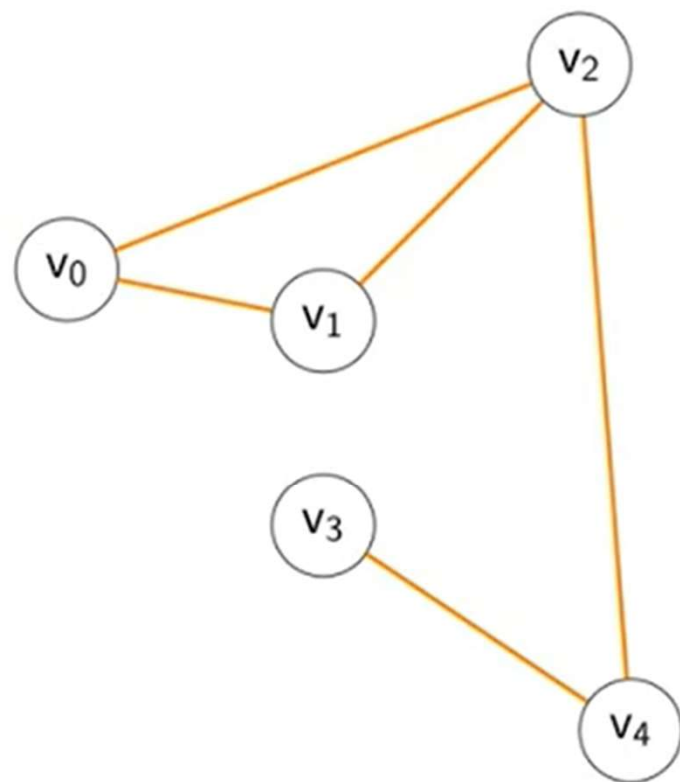
Grafos – Conceitos Básicos

- Em grafos não dirigidos, um ciclo deve conter pelo menos 3 arestas
- Grafos em que há ao menos um ciclo são chamados de cíclicos
- Grafos em que não há ciclos são chamados de acíclicos



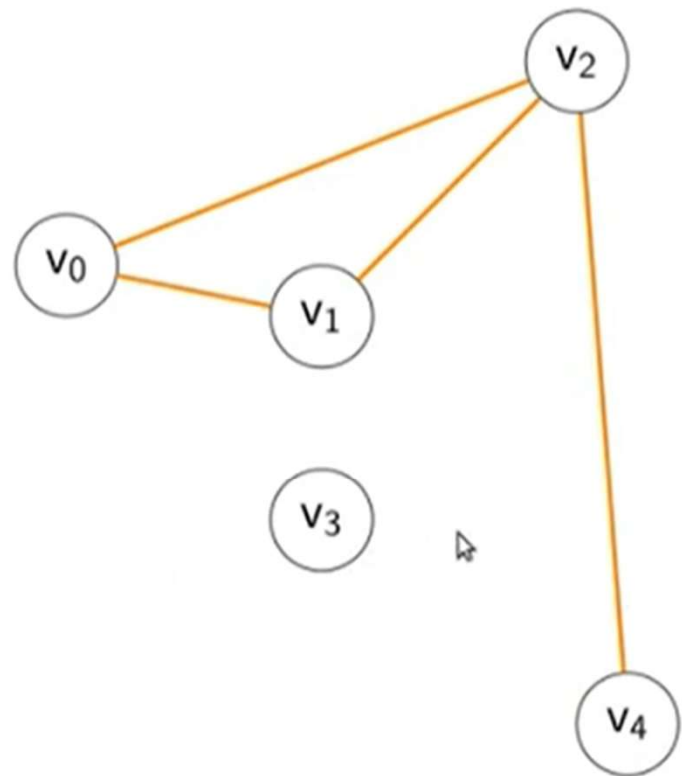
Grafos – Conceitos Básicos

- Um grafo não direcionado é conexo (ou conectado) se cada par de vértices nele estiver conectado por um caminho
 - O grafo ao lado é conexo



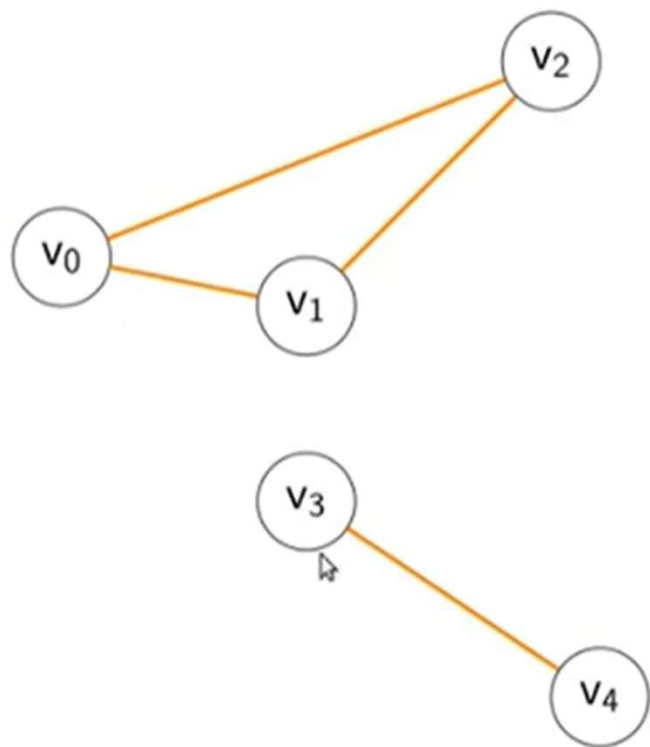
Grafos – Conceitos Básicos

- Um grafo não direcionado é conexo (ou conectado) se cada par de vértices nele estiver conectado por um caminho
 - O grafo ao lado é conexo
 - Agora é desconexo



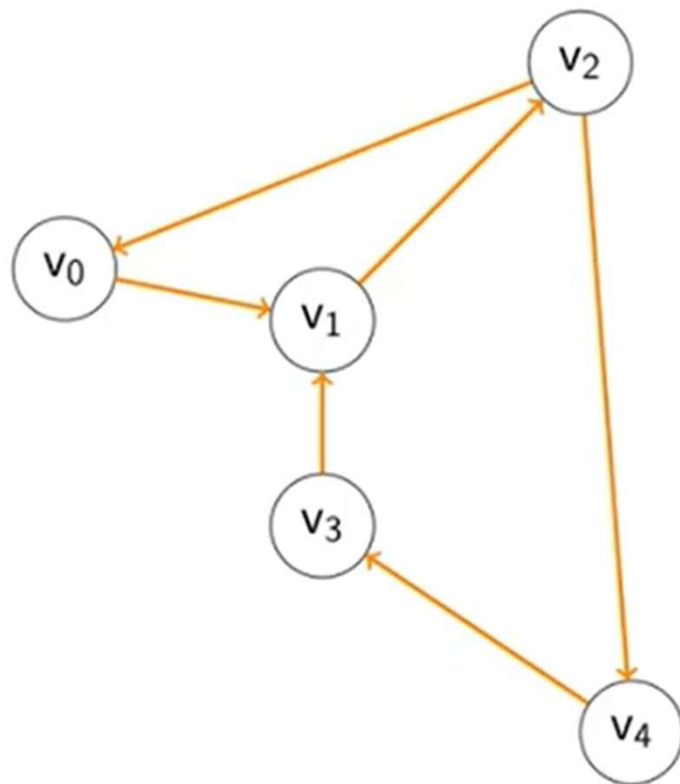
Grafos – Conceitos Básicos

- Um grafo não direcionado é conexo (ou conectado) se cada par de vértices nele estiver conectado por um caminho
 - O grafo ao lado é conexo
 - Agora é desconexo
 - E continua assim



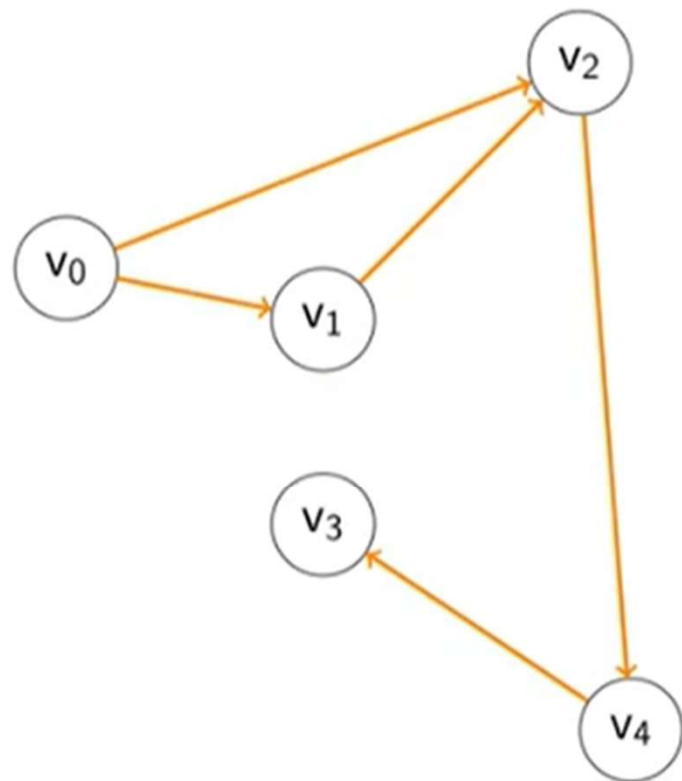
Grafos – Conceitos Básicos

- Um grafo dirigido é fortemente conexo se existir um caminho entre qualquer par de vértices no grafo
 - Contém um caminho direto de u para v e um caminho direto v para u para cada par de vértices (u, v)



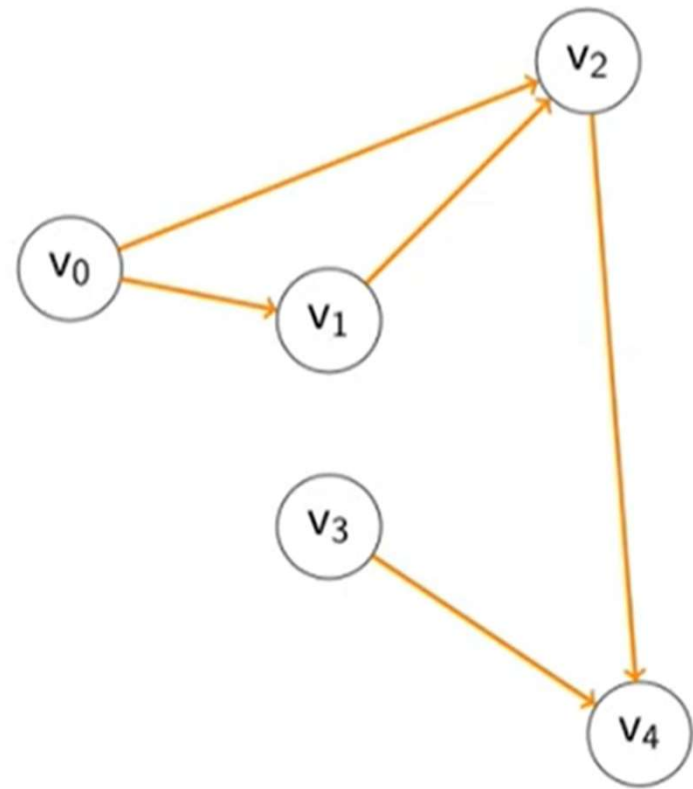
Grafos – Conceitos Básicos

- Um grafo dirigido é conexo se possuir um caminho de u para v , ou um caminho de v para u , para cada par de vértices (u, v)



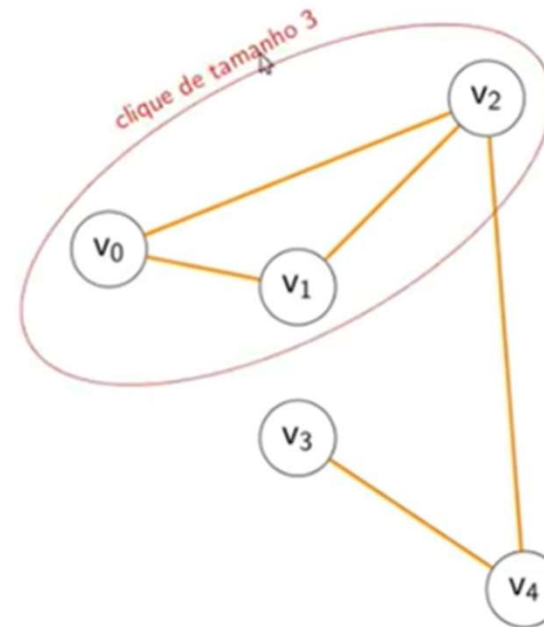
Grafos – Conceitos Básicos

- Um grafo dirigido é fracamente conexo se a substituição de todas as suas arestas por arestas não-direcionadas produz um grafo conexo.
 - Ex: não há caminho de $v_3 \rightarrow v_2$ nem de $v_2 \rightarrow v_3$ (não é conexo, mas é fracamente conexo)



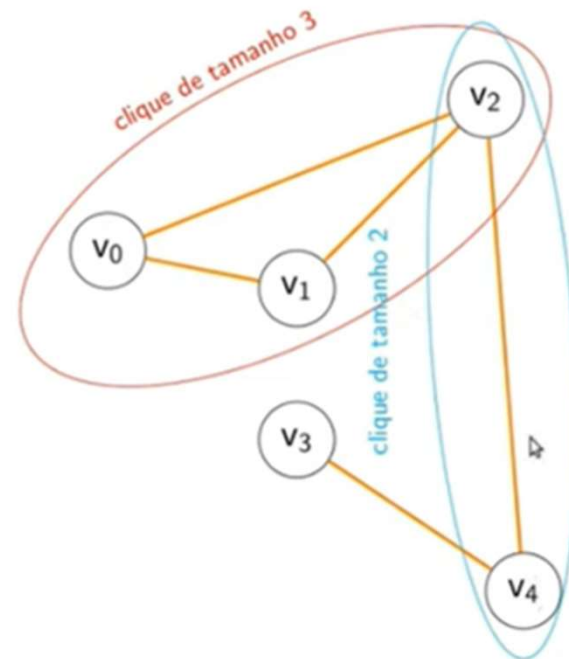
Grafos – Conceitos Básicos

- Em grafos não dirigidos, um clique é um subconjunto de seus vértices tal que cada par de vértices do subconjunto é conectado por uma aresta.



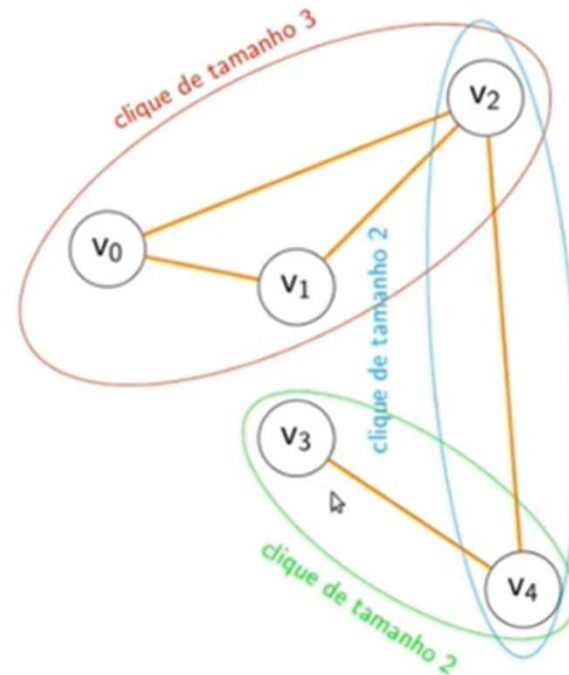
Grafos – Conceitos Básicos

- Em grafos não dirigidos, um clique é um subconjunto de seus vértices tal que cada par de vértices do subconjunto é conectado por uma aresta.



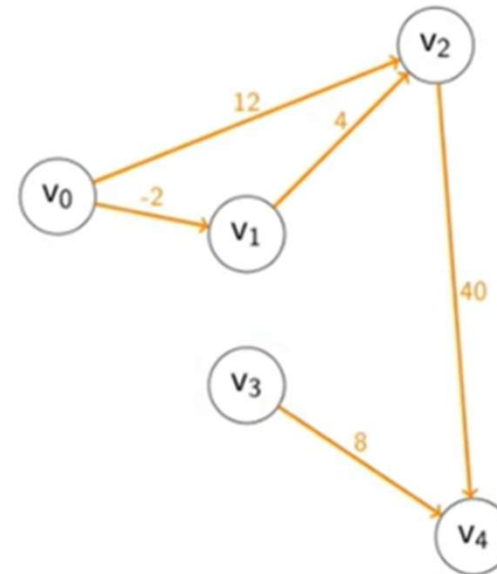
Grafos – Conceitos Básicos

- Em grafos não dirigidos, um clique é um subconjunto de seus vértices tal que cada par de vértices do subconjunto é conectado por uma aresta.



Grafos – Conceitos Básicos

- Grafos também podem ser ponderados
 - Caso em que possuem pesos associados às suas arestas
 - Esses pesos podem representar custos, distâncias etc.

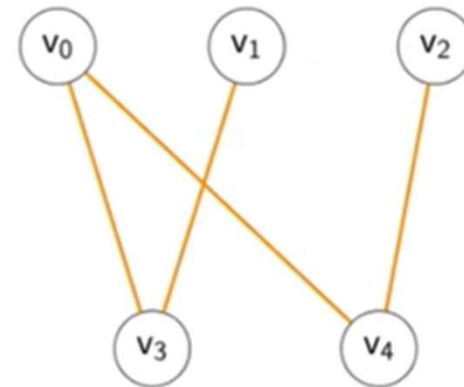


Grafos Específicos

Existem, ainda, diversos tipos de gráficos com especificidades em seus dados ou em sua representação.

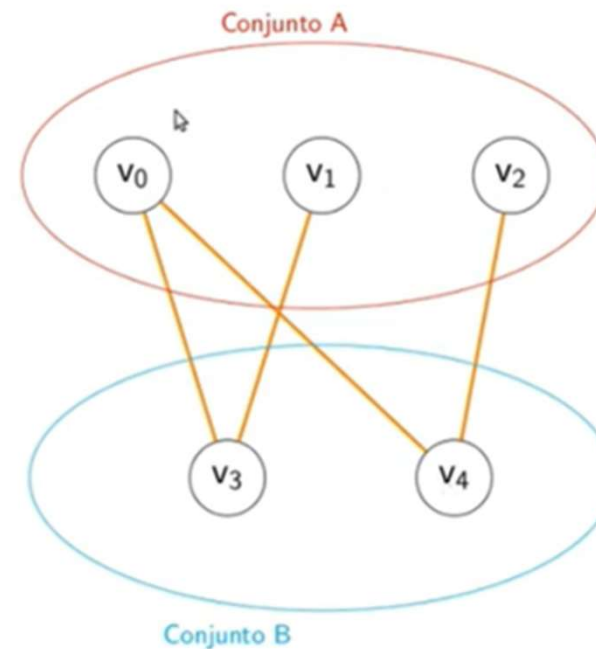
Grafo Bipartido

- Os vértices podem ser divididos em dois conjuntos disjuntos
- Não existem arestas entre vértices de um mesmo conjunto.



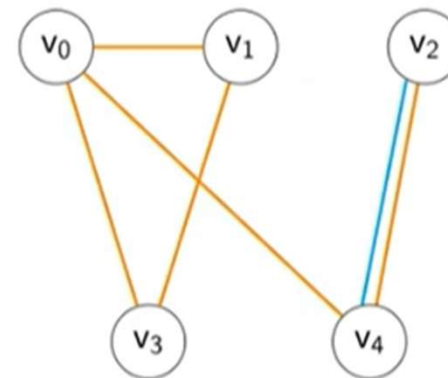
Grafo Bipartido

- Os vértices podem ser divididos em dois conjuntos disjuntos
- Não existem arestas entre vértices de um mesmo conjunto.



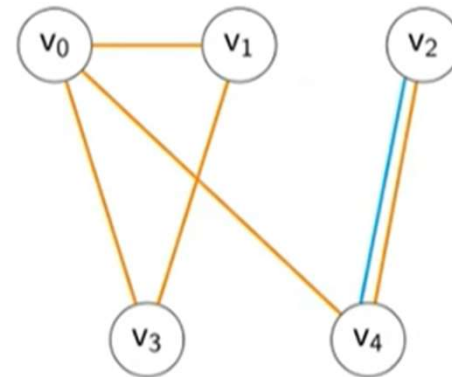
Multigrafo

- Permite a existência de arestas múltiplas entre um mesmo par de vértices.



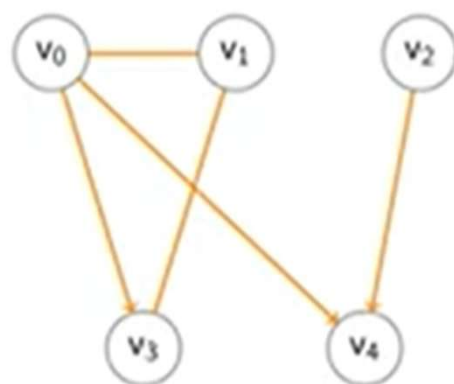
Multigrafo

- Permite a existência de arestas múltiplas entre um mesmo par de vértices.



Grafo Misto

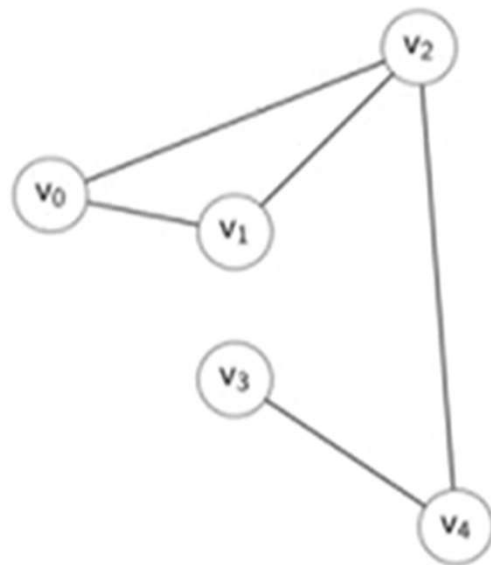
- Possui arestas direcionadas e não direcionadas.



Grafos – Representação

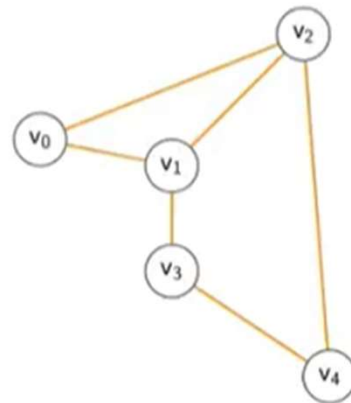
Voltando ao **Básico**:

- Grafos são representados como um conjunto de nós (vértices) conectados par a par por linhas (arestas)



Grafos – Representação

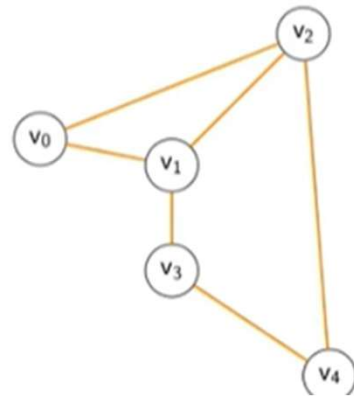
- Como podemos representar um grafo?
 - Como um mapeamento de cada nó à lista de nós aos quais ele está conectado



Não dirigido

Grafos – Representação

- Como podemos representar um grafo?
 - Como um mapeamento de cada nó à lista de nós aos quais ele está conectado

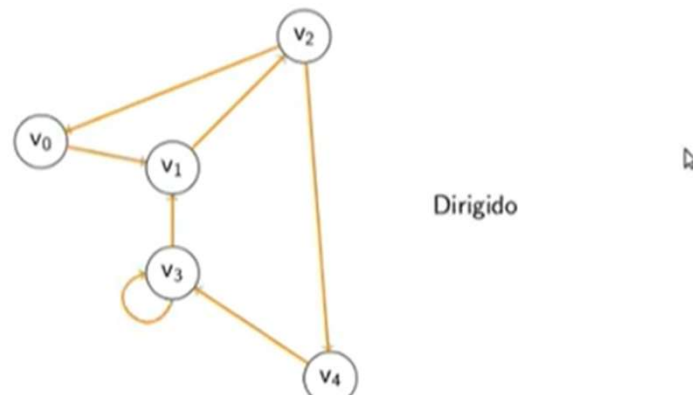


Não dirigido

<i>Nó</i>	<i>Conectado a</i>
v0	v1, v2
v1	v0, v2, v3
v2	v0, v1, v4
v3	v1, v4
v4	v2, v3

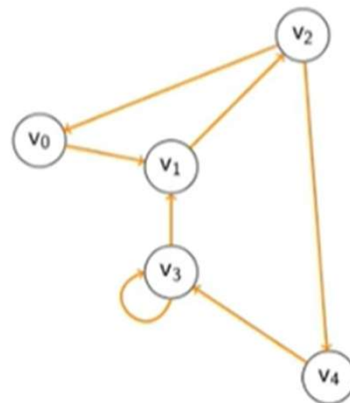
Grafos – Representação

- Como podemos representar um grafo?
 - Como um mapeamento de cada nó à lista de nós aos quais ele está conectado



Grafos – Representação

- Como podemos representar um grafo?
 - Como um mapeamento de cada nó à lista de nós aos quais ele está conectado



Dirigido

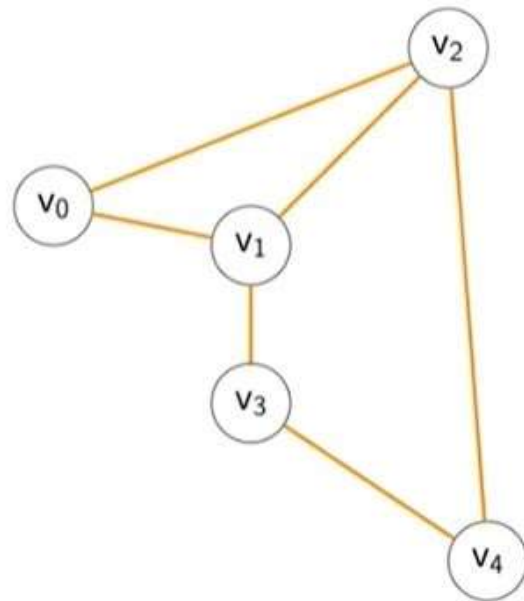
<i>Nó</i>	<i>Conectado a</i>
v0	v1
v1	v2
v2	v0, v4
v3	v1, v3
v4	v3

Grafos – Representação

- Representação computacional de grafos
- Existem duas maneiras usuais de representar grafos:
 - Matrizes de adjacência
 - Listas de adjacência

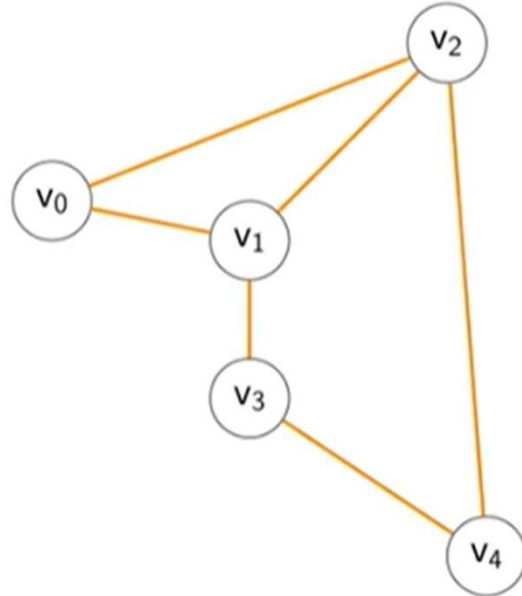


Grafos – Matrizes de Adjacências



	v0	v1	v2	v3	v4
v0					
v1					
v2					
v3					
v4					

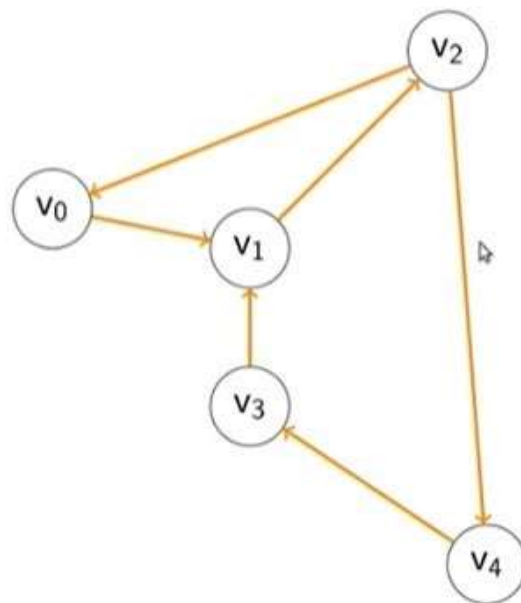
Grafos – Matrizes de Adjacências



	v_0	v_1	v_2	v_3	v_4
v_0	0	1	1	0	0
v_1	1	0	1	1	0
v_2	1	1	0	0	1
v_3	0	1	0	0	1
v_4	0	0	1	1	0

Grafos – Matrizes de Adjacências

- E se o grafo for dirigido?

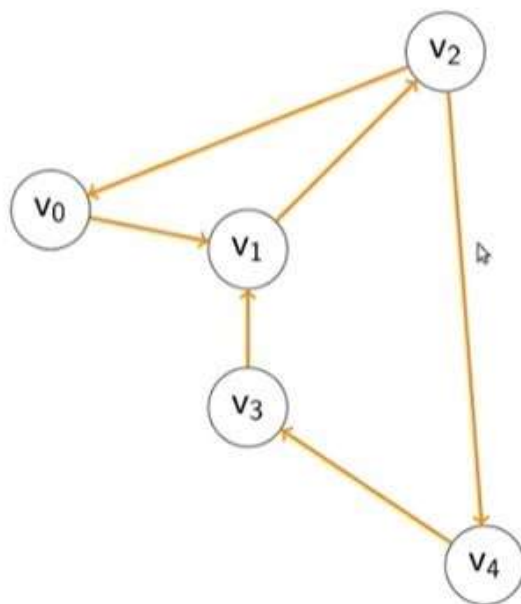


A matriz não será simétrica.

	v_0	v_1	v_2	v_3	v_4
v_0					
v_1					
v_2					
v_3					
v_4					

Grafos – Matrizes de Adjacências

- E se o grafo for dirigido?

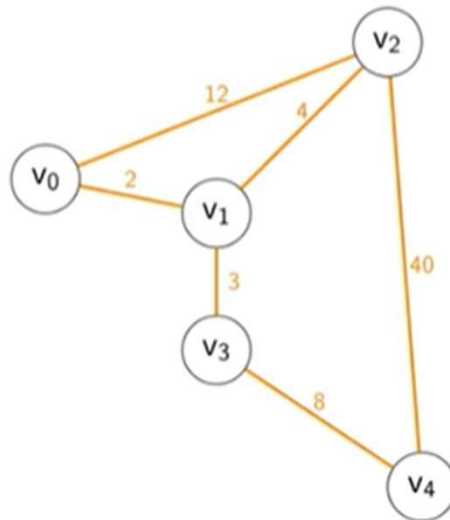


A matriz não será simétrica.

	v_0	v_1	v_2	v_3	v_4
v_0	0	1	0	0	0
v_1	0	0	1	0	0
v_2	1	0	0	0	1
v_3	0	1	0	0	0
v_4	0	0	0	1	0

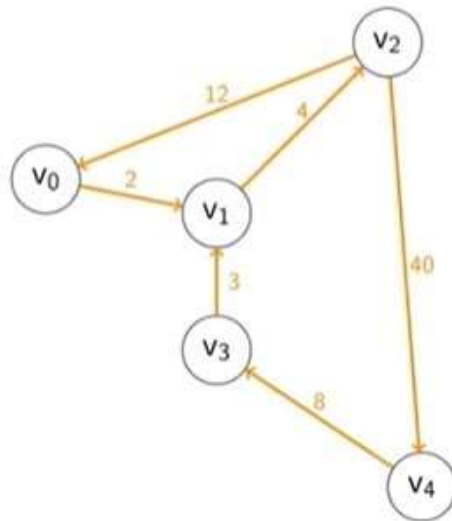
Grafos – Matrizes de Adjacências

- E se o grafo for ponderado?



Grafos – Matrizes de Adjacências

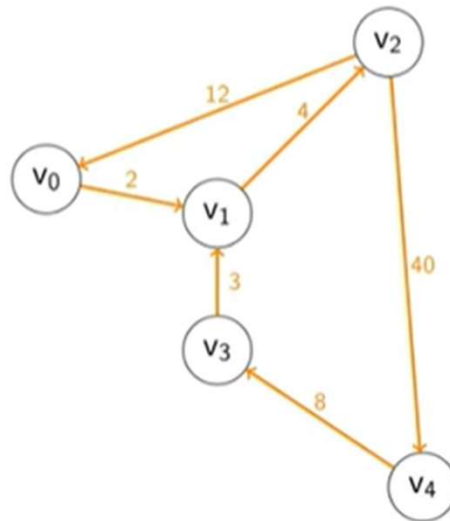
- E se o grafo for dirigido?



	v_0	v_1	v_2	v_3	v_4
v_0					
v_1					
v_2					
v_3					
v_4					

Grafos – Matrizes de Adjacências

- E se o grafo for dirigido?

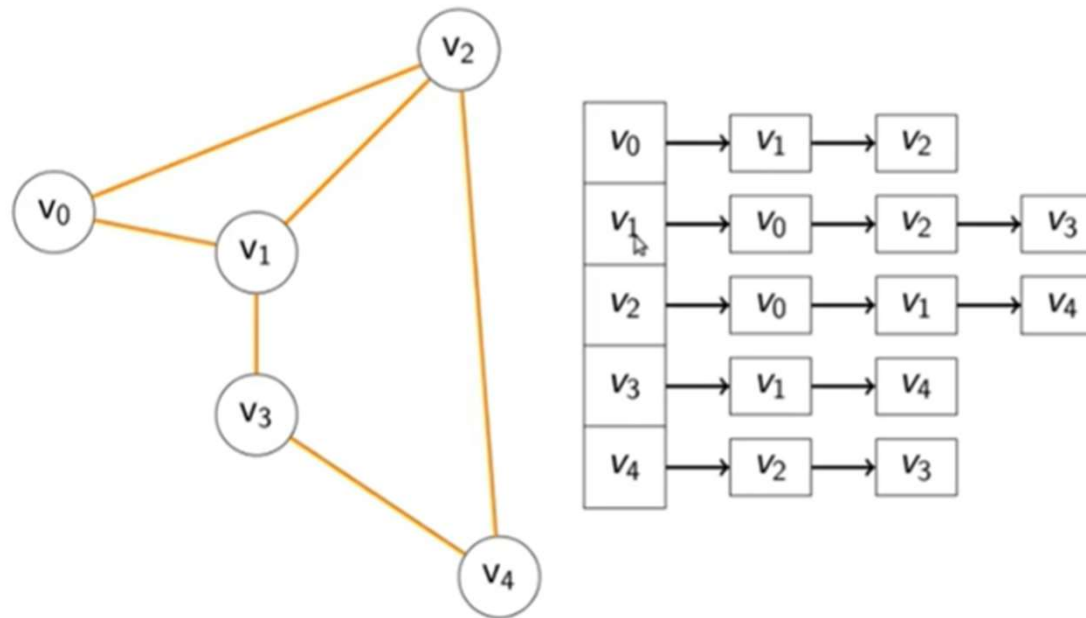


	v_0	v_1	v_2	v_3	v_4
v_0	0	2	0	0	0
v_1	0	0	4	0	0
v_2	12	0	0	0	40
v_3	0	3	0	0	0
v_4	0	0	0	8	0

Grafos – Listas de Adjacências

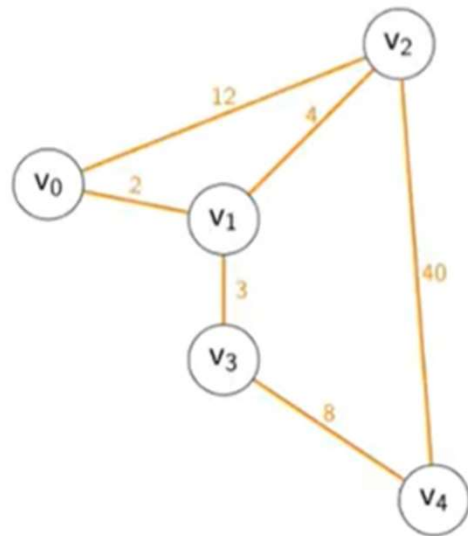
- Uma lista de adjacências de um grafo com n vértices consiste de um arranjo de n listas ligadas, uma para cada vértice no grafo.
 - Para cada vértice u , a lista contém todos os vizinhos de u
 - Ou seja, todos os vértices v_i para os quais existe uma aresta (u, v_i)

Grafos – Listas de Adjacências



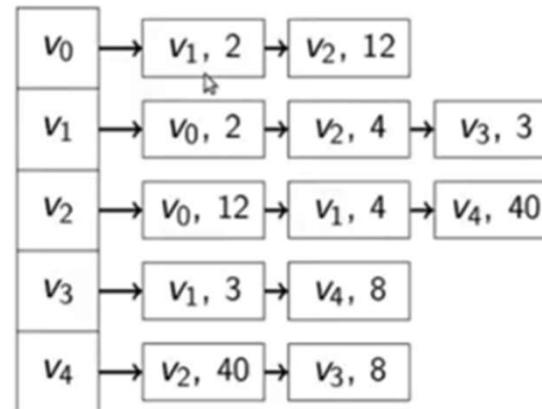
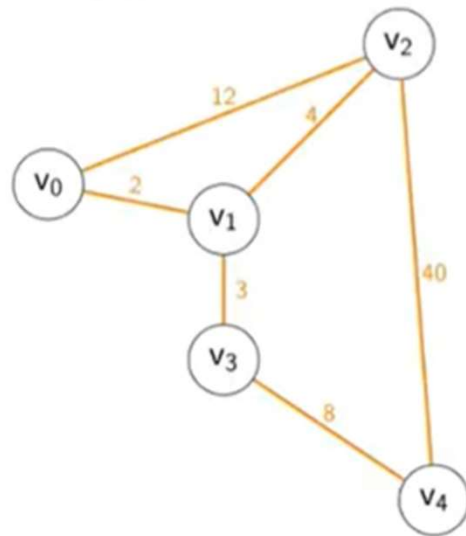
Grafos – Listas de Adjacências

- E se o grafo for ponderado?



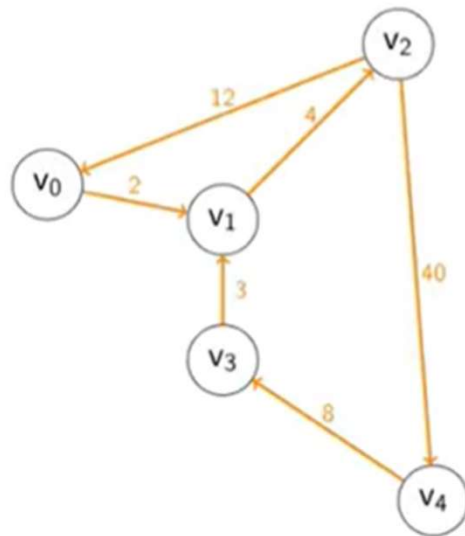
Grafos – Listas de Adjacências

- E se o grafo for ponderado? Armazenamos os pesos nas lista.



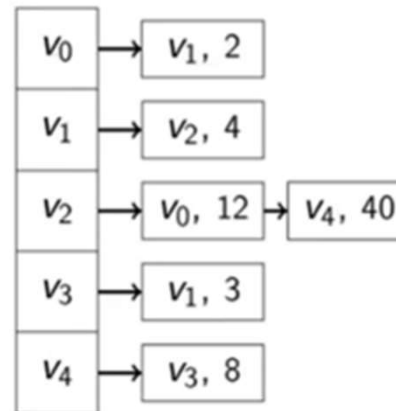
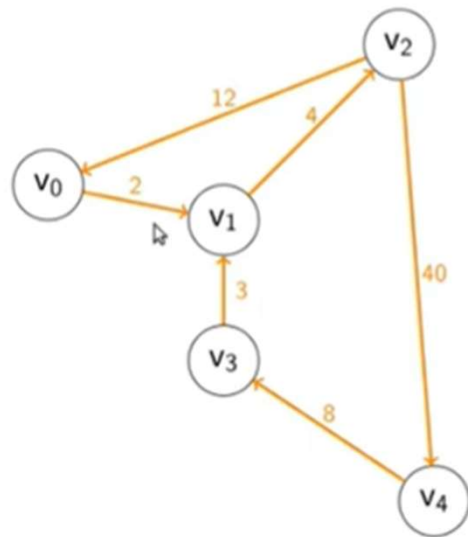
Grafos – Listas de Adjacências

- E se o grafo for dirigido?



Grafos – Listas de Adjacências

- E se o grafo for dirigido?



Grafos – Representação

- E quando usamos uma ou outra representação?
- Vai depender da densidade do grafo
 - Se denso (quando possui muitas arestas em relação ao número de vértices) ou esparso (com relativamente poucas arestas)
- Vai depender das operações que queremos executar

Perguntas ?